

# Variáveis aleatórias discretas

# Introdução

- **Espaço amostral,  $R_X$ , de uma variável aleatória (v. a.)  $X$** 
  - **Def:** É o conjunto de todos os valores *possíveis* de  $X$ .
  - **Ex:**  $X$ : "Nº de coroas obtidas no lançamento de 2 moedas"  $\Rightarrow R_X = \{0, 1, 2\}$
- **Variável aleatória *discreta***
  - **Def:** Uma v. a. é *discreta* se o seu espaço amostral for *finito* ou *infinito numerável*.
- **Exercício:** Quais das seguintes definições são v. a. discretas?
  - a)  $X$ : "Sair dois números pares no lançamento de dois dados".
  - b)  $X$ : "Número de vezes que sai um número par no lançamento de dois dados".
  - c)  $X$ : "Peso de uma zebra, em kg".
  - d)  $X$ : "Número de chamadas recebidas num minuto".

# Função de probabilidade

- **Função de probabilidade** de uma v. a. discreta  $X$ 
  - **Def:** É uma função  $f(x)$  tal que

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & , x \neq x_i \\ p_i & , x = x_i \end{cases}$$

onde:

$x$  – Valor real qualquer

$x_i$  – Valor possível de  $X$

$p_i = P(X = x_i)$

- **Propriedades:**

$$i) \quad f(x) \geq 0$$

$$ii) \quad \sum_x f(x) = 1$$

# Exercício

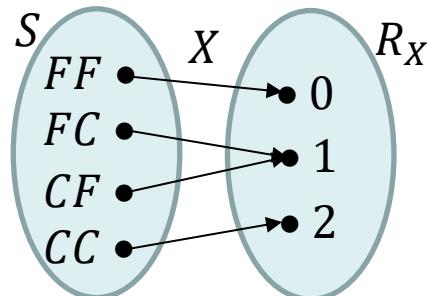
Construa a tabela e o gráfico da função de probabilidade da v.a.  $X$ : "Número de coroas obtidas no lançamento de duas moedas".

F :"Saiu face"

C :"Saiu coroa"

$$S = \{FF, FC, CF, CC\}$$

$$R_X = \{0,1,2\}$$

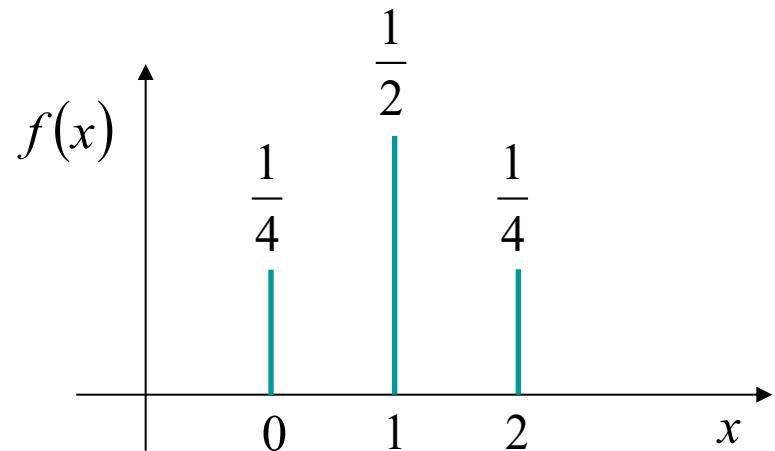


$x$	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$P(X = 0) = P(FF) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(FC) + P(CF) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(CC) = \frac{1}{4}$$



# Função de distribuição

- *Função de distribuição* de uma v. a. discreta  $X$ 
  - **Def:** É uma função  $F(x)$  tal que

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad x \in \mathbb{R}$$

- **Nota:**  $F(a)$  dá-nos a probabilidade acumulada entre  $-\infty$  e  $a$ .
- **Propriedades:**
  - i)  $0 \leq F(x) \leq 1$
  - ii)  $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

# Exercício

Sendo  $F(x)$  a função de distribuição da v.a.  $X$ : "Número de coroas obtidas no lançamento de duas moedas", calcule:

a)  $F(-1)$

$$F(-1) = P(X \leq -1) = 0$$

b)  $F(0)$

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

c)  $F(0.5)$

$$F(0.5) = P(X \leq 0.5) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

d)  $F(1)$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$$

e)  $F(2)$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

	$x$	0	1	2
	$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{4} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

# Média ou valor esperado duma v.a. discreta

- *Média ou valor esperado* de uma v. a. discreta  $X$ 
  - **Def:** É a constante

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) = \sum_i x_i p_i$$

- **Exercício:** Calcule a média da v.a.  $X$ : “Número de vezes que sai a face 1 no lançamento de dois dados”.

$x$	0	1	2
$f(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = 0 \times \frac{25}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

# Média ou valor esperado duma v.a. discreta

- Propriedades de  $E(X)$ :

$$i) \quad a = \text{constante} \Rightarrow E(a) = a$$

$$ii) \quad a = \text{constante} \Rightarrow E(aX) = aE(X)$$

$$iii) \quad E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$iv) \quad X \text{ e } Y \text{ são independentes} \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

- *Exercício:* Quais das seguintes equações são verdadeiras?

a)  $E(5) = 5$

b)  $E(-X) = -E(X)$

c)  $E(X - 2) = E(X) - 2$

d)  $E(X/3) = E(X)/3$

# Variância e desvio padrão duma v.a. discreta

- **Variância** de uma v. a. discreta  $X$

- **Def:** É a constante

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= V(X) = E\{(X - \mu)^2\} \\ &= E(X^2) - E^2(X) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \mu^2\end{aligned}$$

- **Desvio padrão** de uma v. a. discreta  $X$

- **Def:** É a constante

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

- **Exercício:** Calcule a variância da v.a.  $X$ : “Número de vezes que sai a face 1 no lançamento de dois dados”.

$x$	0	1	2
$f(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$V(X) = 0^2 \times \frac{25}{36} + 1^2 \times \frac{10}{36} + 2^2 \times \frac{1}{36} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}$$

# Variância e desvio padrão duma v.a. discreta

- Propriedades de  $V(X)$ :

$$i) \quad a = \text{constante} \Rightarrow V(a) = 0$$

$$ii) \quad a = \text{constante} \Rightarrow V(aX) = a^2 V(X)$$

$$iii) \quad X \text{ e } Y \text{ são independentes} \Rightarrow V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

- *Exercício:* Quais das seguintes equações são verdadeiras?

$$a) \quad V(5) = 5$$

$$b) \quad V(-X) = V(X)$$

$$c) \quad V(X - 2) = V(X)$$

$$d) \quad V(X/3) = V(X)/9$$

# Outros parâmetros duma v.a. discreta

- **Coeficiente de variação** de uma v. a. discreta  $X$ 
  - **Def:** É a constante

$$\omega = \frac{\sigma}{|\mu|}$$

- **Momentos de ordem  $r$**  de uma v. a. discreta  $X$ 
  - **Def:** O momento centrado de ordem  $r$ , ( $r \in \mathbb{N}_0$ ), de uma v. a. discreta é a constante

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r] = \sum_x (x - \mu)^r f(x)$$

# Outros parâmetros duma v.a. discreta

- **Coeficiente de assimetria** de uma v. a. discreta  $X$

- **Def:** É a constante

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- **Utilidade:** Mede a *assimetria* da distribuição de probabilidades.

- **Coeficiente de curtose** de uma v. a. discreta  $X$

- **Def:** É a constante

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

- **Utilidade:** Mede o *peso das caudas* e o *achatamento* da distribuição de probabilidades.