

Variáveis aleatórias discretas

Introdução

- **Espaço amostral, R_X** , de uma variável aleatória (*v. a.*) X
 - **Def:** É o conjunto de todos os valores *possíveis* de X .
 - **Ex:** X : “Nº de coroas obtidas no lançamento de 2 moedas” $\Rightarrow R_X = \{0, 1, 2\}$
- Variável aleatória **discreta**
 - **Def:** Uma *v. a.* é **discreta** se o seu espaço amostral for *finito* ou *infinito numerável*.
- **Exercício:** Quais das seguintes definições são *v. a.* discretas?
 - X : “Sair dois números pares no lançamento de dois dados”.
 - X : “Número de vezes que sai um número par no lançamento de dois dados”.
 - X : “Peso de uma zebra, em kg”.
 - X : “Número de chamadas recebidas num minuto”.

Função de probabilidade

- *Função de probabilidade* de uma v. a. discreta X

- **Def:** É uma função $f(x)$ tal que

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & , x \neq x_i \\ p_i & , x = x_i \end{cases}$$

onde:

x – Valor real qualquer

x_i – Valor possível de X

$$p_i = P(X = x_i)$$

- *Propriedades:*

$$i) \quad f(x) \geq 0$$

$$ii) \quad \sum_x f(x) = 1$$

Exercício

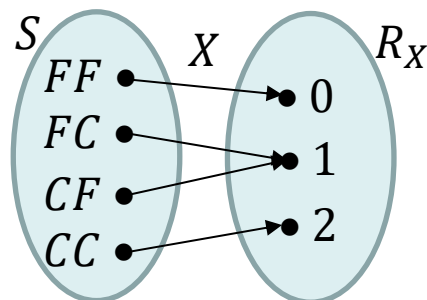
Construa a tabela e o gráfico da função de probabilidade da v.a. X : "Número de coroas obtidas no lançamento de duas moedas".

F : "Saiu face"

C : "Saiu coroa"

$$S = \{FF, FC, CF, CC\}$$

$$R_X = \{0, 1, 2\}$$

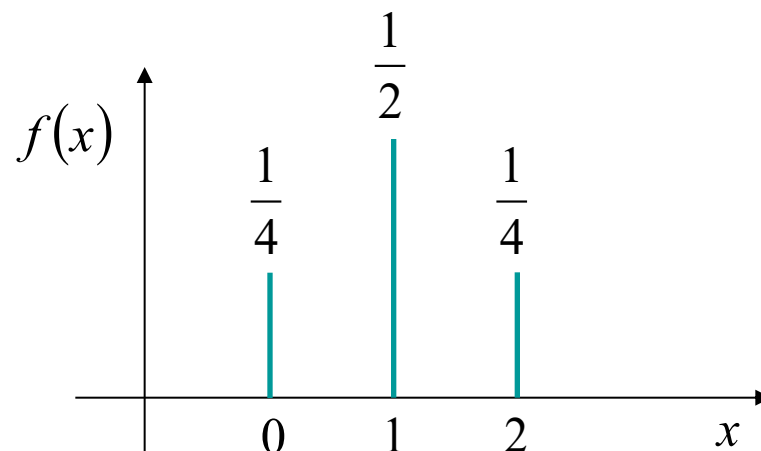


| x | 0 | 1 | 2 |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| $f(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

$$P(X=0) = P(FF) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(FC) + P(CF) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(CC) = \frac{1}{4}$$



Função de distribuição

- *Função de distribuição* de uma v. a. discreta X

- **Def:** É uma função $F(x)$ tal que

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad x \in \mathfrak{R}$$

- **Nota:** $F(a)$ dá-nos a probabilidade acumulada entre $-\infty$ e a .

- **Propriedades:**

$$i) \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$ii) \quad P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Exercício

Sendo $F(x)$ a função de distribuição da v.a. X : "Número de coroas obtidas no lançamento de duas moedas", calcule:

a) $F(-1)$

$$F(-1) = P(X \leq -1) = 0$$

b) $F(0)$

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

c) $F(0.5)$

$$F(0.5) = P(X \leq 0.5) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

d) $F(1)$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$$

e) $F(2)$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

| x | 0 | 1 | 2 |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| $f(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{4} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

Média ou valor esperado duma v.a. discreta

- *Média ou valor esperado* de uma v. a. discreta X

- *Def:* É a constante

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) = \sum_i x_i p_i$$

- *Exercício:* Calcule a média da v.a. X : “Número de vezes que sai a face 1 no lançamento de dois dados”.

| x | 0 | 1 | 2 |
|--------|-----------------|-----------------|----------------|
| $f(x)$ | $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$E(X) = 0 \times \frac{25}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

Média ou valor esperado duma v.a. discreta

- Propriedades de $E(X)$:

i) $a = \text{constante} \Rightarrow E(a) = a$

ii) $a = \text{constante} \Rightarrow E(aX) = aE(X)$

iii) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

iv) X e Y são independentes $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

- Exercício:* Quais das seguintes equações são verdadeiras?

a) $E(5) = 5$

b) $E(-X) = -E(X)$

c) $E(X - 2) = E(X) - 2$

d) $E(X/3) = E(X)/3$

Variância e desvio padrão duma v.a. discreta

- **Variância** de uma v. a. discreta X

- **Def:** É a constante

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= E\{(X - \mu)^2\} \\ &= E(X^2) - E^2(X) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \mu^2\end{aligned}$$

- **Desvio padrão** de uma v. a. discreta X

- **Def:** É a constante

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

- **Exercício:** Calcule a variância da v.a. X : “Número de vezes que sai a face 1 no lançamento de dois dados”.

| x | 0 | 1 | 2 |
|--------|-----------------|-----------------|----------------|
| $f(x)$ | $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$V(X) = 0^2 \times \frac{25}{36} + 1^2 \times \frac{10}{36} + 2^2 \times \frac{1}{36} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}$$

Variância e desvio padrão duma v.a. discreta

- Propriedades de $V(X)$:

i) $a = \text{constante} \Rightarrow V(a) = 0$

ii) $a = \text{constante} \Rightarrow V(aX) = a^2 V(X)$

iii) X e Y são independentes $\Rightarrow V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

- *Exercício:* Quais das seguintes equações são verdadeiras?

a) $V(5) = 5$

b) $V(-X) = V(X)$

c) $V(X - 2) = V(X)$

d) $V(X/3) = V(X)/9$

Outros parâmetros duma v.a. discreta

- *Coeficiente de variação* de uma v. a. discreta X

- *Def:* É a constante

$$\omega = \frac{\sigma}{|\mu|}$$

- *Momentos de ordem r* de uma v. a. discreta X

- *Def:* O momento centrado de ordem r , ($r \in \mathbb{N}_0$), de uma v. a. discreta é a constante

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r] = \sum_x (x - \mu)^r f(x)$$

Outros parâmetros duma v.a. discreta

- **Coeficiente de assimetria** de uma v. a. discreta X

- **Def:** É a constante

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- **Utilidade:** Mede a *assimetria* da distribuição de probabilidades.

- **Coeficiente de curtose** de uma v. a. discreta X

- **Def:** É a constante

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

- **Utilidade:** Mede o *peso das caudas* e o *achatamento* da distribuição de probabilidades.